
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

D. GUIDETTI

CONVERGENZA A UNO STATO STAZIONARIO E STABILITA' DELLE
SOLUZIONI DI EQUAZIONI PARABOLICHE QUASI LINEARI

19 FEBBRAIO 1987

Consideriamo equazioni paraboliche quasi lineari del tipo

$$(1) \quad \frac{du}{dt} + A(t,u)u = f(t,u)$$

Introduciamo allora due spazi di Banach X_0, X_1 tali che $X_1 \subset X_0$, X_1 è il dominio di un operatore lineare chiuso A , tale che $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigrupp analitico $\{e^{-tA}\}$ soddisfacente la stima

$\|e^{-tA}\| \leq M e^{-\delta t}$, con $M, \delta > 0$. Sotto tali condizioni è possibile definire $\forall \alpha > 0$ l'operatore

$$A^{-\alpha} = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-tA} dt$$

Si ha che $A^{-\alpha}$ è limitato e iniettivo $\forall \alpha > 0$.

Poniamo allora $A^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-\alpha})^{-1}$. $\forall \alpha > 0$, $D(A^\alpha) = X_\alpha$ è denso in X_0 , A^α è un operatore chiuso, $\beta > \alpha \Rightarrow X_\beta \subset X_\alpha$. Se poniamo $\|x\|_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \|A^\alpha x\|$ per $x \in X_\alpha$, avremo $X_\beta \subset X_\alpha$ per $\beta > \alpha$.

Facciamo allora le seguenti ipotesi:

(B1) $A(t,u)$ è un operatore lineare chiuso in X_0 definito $\forall t \in [0, +\infty]$, $u \in X_\alpha$, con $\|u\|_\alpha < R$ per un certo $R \in]0, +\infty]$ ($\alpha \in]0, 1[$ fissato).

Inoltre $D(A(t,u)) = X_1 \forall (t,u)$

(B2) $\rho(A(t,u)) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$,

$$\|(A(t,u) - \lambda)^{-1}\| \leq \operatorname{cost}(\|u\|_\alpha) (1 + |\lambda|)^{-1}$$

(Qui e nel seguito $\operatorname{cost}(r,s,\dots)$ indicherà una funzione dipendente da r,s,\dots non decrescente, salvo diversa precisazione, in ciascuna variabile).

$$(B3) \quad \|A(t,u) - A(s,v)\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)} \leq \text{cost}(\|u\|_\alpha, \|v\|_\alpha)$$

$$(|t-s|^\mu + \|u-v\|_\alpha), \text{ con } \mu \in]0, 1].$$

$$(B4) \quad \|A(t,u) - A(\infty, u)\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)} \leq \text{cost}(t, \|u\|_\alpha)$$

$$\text{con } \text{cost}(t,s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall s < R.$$

Sulla f facciamo le seguenti ipotesi:

$$(F1) \quad f: [0, +\infty] \times B_R^\alpha \rightarrow X_0 \quad (B_R^\alpha = \{u \in X_\alpha \mid \|u\|_\alpha < R\})$$

di classe C^1 (su B_R^α prendiamo la norma $\|\cdot\|_\alpha$)

$$(F2) \quad \|f'_u(\infty, u)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X_0)} \leq \text{cost}(\|u\|_\alpha)$$

$$(F3) \quad \|f(t,u) - f(s,u)\| + \|f'_u(t,u) - f'_u(s,u)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X_0)} \leq \text{cost}(\|u\|_\alpha) |t-s|^\mu$$

$$(F4) \quad \|f(t,u) - f(\infty, u)\| + \|f'_u(t,u) - f'_u(\infty, u)\|_{\mathcal{L}(X_\alpha, X_0)}$$

$$\leq \text{cost}(t, \|u\|_\alpha) \text{ con } \text{cost}(t,s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ad esempio, consideriamo il problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u,Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(t,x,u,Du)$$

$$(2) \quad u(t,x) = 0 \quad \text{per } t \geq t_0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$u(t_0, x) \text{ assegnato.}$$

Qui Ω è un aperto limitato e regolare di R^n , $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Supponiamo che:

(C1) le a_{ij} sono definite e limitate da $[0, +\infty] \times \bar{\Omega} \times B_{R'} \times B_{R'}^n \rightarrow R$
con $B_{R'} =]-R', R'[$, $B_{R'}^n = \{y \in R^n \mid |y| < R'\}$ ($0 < R' \leq +\infty$)

(C2) $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x, y, p) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2$, con $\nu > 0$ indipendente da t, x, u, p .

(C3) $|a_{ij}(t, x, u, p) - a_{ij}(s, y, v, q)| \leq A_1(|t-s|^\mu + |x-y|^\mu + |u-v| + |p-q|)$

(C4) $a_{ij}(t, x, u, p) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a_{ij}(\infty, x, u, p)$ uniformemente in x, u, p .

Sulla $f: [0, +\infty] \times \bar{\Omega} \times B_{R'} \times B_{R'}^n \rightarrow R$ supponiamo che:

(G1) $(u, p) \rightarrow f(t, x, u, p)$ è di classe C^1

(G2) $D_{(u,p)} f$ è limitato in $[0, +\infty] \times \bar{\Omega} \times B_{R'} \times B_{R'}^n$.

(G3) $|D_{(u,p)} f(t, x, u, p) - D_{(v,q)} f(t, x, v, q)| \leq A_2(|t-s|^\mu + |x-y|^\mu + |u-v| + |p-q|)$

(G4) $|f(t, x, u, p) - f(s, y, u, p)| \leq A_3(|t-s|^\mu + |x-y|^\mu)$

(G5) $|f(t, x, u, p) - f(\infty, x, u, p)| + |D_{(u,p)} f(t, x, u, p) +$
 $- D_{(u,p)} f(\infty, x, u, p)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ uniformemente in x, u, p .

Poniamo $X_0 = L^p(\Omega)$ ($1 < p < +\infty$), $X_1 = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $Au = -\Delta u$.

È ben noto che, se $s_1 < \alpha < s_2$

$$(X_0, X_1)_{s_2, p} \subset D(A^\alpha) \subset (X_0, X_1)_{s_1, p}$$

e (vedi [1]), se $s > 1/2p$, $s \neq 1/2$, $(X_0, X_1)_{s, p} = \{u \in W^{2s, p}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Se $p=2$, A è autoaggiunto in $X_0 = L^2(\Omega)$ e, per $\alpha > 1/4$, $D(A^\alpha) = \{u \in H^{2\alpha}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$ (vedi [2], vol. 1, cap. 1).

Perciò, se $\alpha > \frac{1}{2}$ e $p \neq 2$, oppure $\alpha \geq 1/2$, $p=2$, $D(A^\alpha) \subset W^{1, p}(\Omega)$.

Infine, se $p > n$, $\alpha > 1/2 + n/2p$, X_α è uno spazio di funzioni di classe C^1 , con le derivate prime hölderiane.

Dunque, $\exists R > 0$, tale che $\|u\|_\alpha < R \Rightarrow \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} < R'$. Perciò, per $u \in B_R^\alpha$, possiamo porre:

$$D(A(t, u)) = W^{2, p}(\Omega) \cap W_0^{1, p}(\Omega),$$

$$(3) \quad A(t, u)v = - \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(t, x, u, Du) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$f(t, u)(x) = f(t, x, u(x), Du(x))$$

Vale il seguente risultato:

Proposizione 1. Siano soddisfatte (C1)-(C4), (G1)-(G5), sia $p > n$, $\alpha > 1/2 + n/2p$. Allora gli operatori definiti in (3) soddisfano (B1)-(B4), (F1)-(F4) per un opportuno valore di $R > 0$.

Ricordiamo anche il seguente risultato (vedi [3]) di esistenza locale:

nelle ipotesi (B1)-(B4), (F1)-(F4), esiste un'unica soluzione classica (locale) massimale di (1) con condizione iniziale $u(t_0) = u_0$, per $u_0 \in X_\beta$ ($\beta > \alpha$), $\|u_0\|_\alpha < R$.

Veniamo al problema dell'esistenza di soluzioni convergenti all'in

finito.

Valgono innanzi tutto i seguenti risultati:

Proposizione 2. Sia $u_0 \in X_1 \cap B_R^\alpha$, u la soluzione massimale di (1) con $u(t_0) = u_0$. Supponiamo che:

- (I) u è definito su $[t_0, T[$.
- (II) $\exists \beta > \alpha$ t.c. $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_\beta < +\infty$
- (III) $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_\alpha < R$.

Allora, $T = +\infty$, $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_1 < +\infty$, u è globalmente hölderiana a va-

lori in $X_\gamma \quad \forall \gamma \in [0, 1[$.

Proposizione 3. Sia $u_0 \in B_R^\alpha$, tale che $\exists u$ soluzione di (1) soddisfacente:

- (i) $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|_\beta < +\infty$ per un certo $\beta > \alpha$.
- (ii) $\|u(t) - u_0\|_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Allora

- (1) $u_0 \in X_1, A(\infty, u_0)u_0 = f(\infty, u_0)$
- (2) $\|u(t) - u_0\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Grosso modo il risultato precedente implica che il limite di una soluzione di (1) deve essere una soluzione di $A(\infty, u)u = f(\infty, u)$. Nel seguito, per semplicità, supporremo che $f(\infty, 0) = 0$ e studieremo l'esistenza e il comportamento asintoti-

co di soluzioni convergenti a 0.

Vale, innanzi tutto, il seguente risultato:

Teorema 4. Supponiamo (I) $f(\infty, 0) = 0$, (II) $\rho(A(\infty, 0) - f'_u(\infty, 0)) \geq \geq \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$. Allora $\forall \beta \in]\alpha, 1]$, $\exists T_0 \geq 0$, $u_0 > 0$ tali che se u è soluzione massimale di (1) con $\|u(t_0)\|_\beta \leq u_0$, $t_0 \geq T_0$, u è globalmente definita e $\|u(t)\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Dim. (Cenno) - La dimostrazione si può fare adattando il metodo di Sobolevski per provare l'esistenza di soluzioni locali.

Se u soddisfa (1), si ha, posto $v(t) = A^\alpha u(t)$, $\frac{d}{dt} (A^{-\alpha} v(t)) + A(t, A^{-\alpha} v(t)) A^{-\alpha} v(t) = f(t, A^{-\alpha} v(t))$.

Indichiamo con $U_V(t, s)$ l'operatore di evoluzione associato a $\{A(t, A^{-\alpha} v(t))\}$. Deve essere, almeno formalmente:

$$A^{-\alpha} v(t) = U_V(t, t_0) u(t_0) + \int_{t_0}^t U_V(t, s) f(s, A^{-\alpha} v(s)) ds,$$

da cui

$$v(t) = A^\alpha U_V(t, t_0) u(t_0) + \int_{t_0}^t A^\alpha U_V(t, s) f(s, A^{-\alpha} v(s)) ds$$

Per poter costruire l'operatore di evoluzione la v deve essere hölderiana (almeno localmente).

Poniamo $S(t_0, \eta, \theta) = \{v \in C([t_0, +\infty[, X_0) | \|v(t) - v(\tau)\| \leq (t - \tau)^\theta, \|v(t)\| \leq \eta, \|v(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}$ (qui $0 < \theta < \beta - \alpha$, $\eta > 0$),
 $Tv(t) = A^\alpha U_V(t, t_0) u(t_0) + \int_{t_0}^t A^\alpha U_V(t, s) f(s, A^{-\alpha} v(s)) ds$. $S(t_0, \eta, \theta)$ è un sottoinsieme chiuso di $\{v \in C([t_0, +\infty[, X_0) | v \text{ è limitata}\}$. Si verifica che per $\eta > 0$

opportuno, t_0 abbastanza grande, T è una contrazione in $S(t_0, n, \theta)$, purché $\|u(t_0)\|_\beta$ sia sufficientemente piccolo. Da ciò segue il risultato.

Osserviamo che, se $f(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty]$, una conseguenza semplice del teorema 4 è un risultato di stabilità asintotica della soluzione nulla.

Passiamo ora a considerare il comportamento asintotico delle soluzioni convergenti a 0.

Valgono i seguenti risultati:

Teorema 5. Supponiamo che $A(t, u) = A(u)$, $f(t, u) = f(u)$, $f(0) = 0$.

Poniamo $B = -A(0) + f'(0)$ e ammettiamo che $\sigma(B) = \{\beta\} \cup \alpha_1$, con $\operatorname{Re} \beta > 0$,

$\inf_{\lambda \in \sigma_1} \operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \beta$, B^{-1} sia compatto in X_0 e β sia un autovalore semplice di B .

Supponiamo inoltre che $\|f(u) - f'(0)u\| = O(\|u\|_\alpha^{1+\nu})$ (con $\nu > 0$) (per $\|u\|_\alpha \rightarrow 0$).

Se u soddisfa $\frac{du}{dt} + A(u(t))u(t) = f(u(t))$, $\|u(t)\|_\alpha \rightarrow 0$ per un certo $\alpha' > \alpha$,

$$u(t) = e^{-\beta t} p + r(t),$$

con $p \in X$, $(\beta - \beta)p = 0$, $\|r(t)\|_\gamma = o(e^{-\beta t})$ ($t \rightarrow +\infty$) $\forall \gamma \in [0, 1[$.

Teorema 6. Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 4. Inoltre,

$f(t, 0) = t^{-\rho} f_1 + t^{-\rho} f_2(t)$ con $\rho > 0$, $\|f_2(t)\|_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Se u è soluzione di (1)

con $\|u(t)\|_\beta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ per $\beta > \alpha$, si ha:

$$u(t) = t^{-\rho} u_1 + r_1(t), \quad \text{con } u_1 \in X_1,$$

$$u_1 = A(\infty, 0)^{-1} f_1, \quad \|r_1(t)\|_\gamma = o(t^{-\rho}) \quad (t \rightarrow \infty) \quad \forall \gamma \in [0, 1[.$$

Vediamo alcune applicazioni dei risultati precedenti al problema

(2). Qui supponiamo sempre che

$$X_0 = L^P(\Omega), \text{ con } p > n, \quad \alpha > 1/2 + n/2p,$$

$$f(\infty, x, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(\infty, x, 0, 0) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

Quest'ultima condizione assicura (come conseguenza del principio del massimo e della teoria degli operatori positivi di Krein-Rutman (vedi [4])) che la condizione $\rho(A(\infty, 0) - f'_u(\infty, 0)) \geq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$ è soddisfatta. Si ha allora:

Teorema 4' $\forall s > 1 + n/p, \exists T_0 \geq 0, \mu_0 > 0$ tali che la soluzione massimale di (2) è globalmente definita se $\|u(t_0, \cdot)\|_{s,p} \leq \mu_0, t_0 \geq T_0$.

Si ha inoltre

$$\|u(t, \cdot)\|_{2,p} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Teorema 5'. Supponiamo $a_{ij}(t, x, u, p) = a_{ij}(x, u, p), f(t, x, u, p) = f(x, u, p)$. Poniamo $D(B) = X_1 = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), Bu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, 0, 0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j}(x, 0, 0) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0, 0)u$.

Poniamo $\beta = \inf\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(B)\}$. Allora:

- (I) β è un autovalore positivo e semplice
- (II) Se u è una soluzione di (2) convergente a 0 in $W^{s,p}(\Omega)$ (con $s > 1 + n/p$), si ha

$$u(t, x) = e^{-\beta t} p(x) + r(t, x), \text{ con } p \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$(\beta - B)p = 0, \quad e^{\beta t} \|r(t, \cdot)\|_{\sigma,p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \sigma < 2.$$

Teorema 6'. Sia $f(t, x, 0, 0) = t^{-\rho} f_1(x) + t^{-\rho} f_2(t, x)$ con $\rho > 0$,

$\|f_2(t, \cdot)\|_{0,p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Se u è soluzione di (2), $\|u(t, \cdot)\|_{s,p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ con $s > 1+n/p$, si

ha

$$u(t, x) = t^{-\rho} u_1(x) + t^{-\rho} r_1(t, x)$$

con $u_1, r_1(t, \cdot) \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|r_1(t, \cdot)\|_{s,p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$\forall \sigma < 2$ e u_1 è soluzione di

$$- \sum_{i,j} a_{ij}(\infty, x, 0, 0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i}(\infty, x, 0, 0) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}(\infty, x, 0, 0) u_1 = f_1(x)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0.$$

Fino a questo punto abbiamo considerato solo il caso in cui $\rho(A(\infty, 0) - f'_u(\infty, 0)) \geq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$ e il suo opposto era quindi il generatore infinitesimale di un semigruppato analitico asintoticamente stabile.

Vogliamo ora considerare il caso in cui quest'ultima condizione non è più necessariamente verificata.

Per farci un'idea del tipo di risultati che ci possiamo aspettare consideriamo il caso dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{du}{dt} + f(u) = 0 \quad (3)$$

$$u(0) = u_0$$

in \mathbb{R}^n , con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$

Se f è lineare e non possiede autovalori con parte reale nulla, la soluzione di (3) tende a 0 se e solo se $u_0 \in \tilde{X}$, con \tilde{X} somma diretta degli autospazi generalizzati corrispondenti agli autovalori di f con parte reale positiva.

Nel caso in cui f non è lineare, supponiamo $f'(0)$ non abbia autovalori con parte reale nulla e indichiamo questa volta con \tilde{X} la somma diretta degli autospazi generalizzati corrispondenti agli autovalori con parte reale positiva, con P un proiettore di R^n su \tilde{X} .

Poniamo $S_{\rho,\sigma} = \{u_0 \in R^n \mid u(\cdot, u_0) \text{ è globalmente definita, } |Pu_0| \leq \sigma, \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, u_0) = 0, |u(t, u_0)| \leq \rho \forall t > 0\}$, con $\rho, \sigma > 0$ $u(t, u_0)$ soluzione massimale di (3).

Indichiamo con $B_\sigma = \{x \in \tilde{X} \mid |x| \leq \sigma\}$. Allora, $\exists \sigma, \rho > 0$ tali che $P|_{S_{\rho,\sigma}} : S_{\rho,\sigma} \rightarrow B_\sigma$ è un omeomorfismo. Inoltre, $S_{\rho,\sigma}$ è tangente in 0 a B_σ , nel

senso che $\lim_{\substack{x \in S_{\rho,\sigma} \\ |x| \rightarrow 0}} \frac{|x - Px|}{|x|} = 0$.

Un risultato del genere vale anche per equazioni semilineari (vedi [6]). Vogliamo estenderlo ad alcune equazioni quasi lineari.

Limitiamoci a considerare equazioni autonome del tipo

$$(4) \quad \frac{du}{dt} + A(u(t))u(t) = f(u(t)).$$

Supponiamo $f(0) = 0$. Scriviamo (4) nella forma

$$(4') \quad \frac{du}{dt} + Bu = f(u),$$

con $B = A(0) - f'(0)$, $f(u) = [A(u) - A(0)]u + f(u) - f'(0)u$.

Si osservi che "moralmente" $f'(0) = 0$.

Per studiare (4') pensando g come una perturbazione di B , è neces-

sario cambiare il quadro funzionale.

Cominciamo allora col richiamare alcune definizioni e risultati con-
tenuti in [5].

Sia $-A$ il generatore infinitesimale di un semigrupp analitico in
uno spazio di Banach $X, \theta \in]0, 1[$.

Poniamo

$$D_{\theta}(A) = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\theta} A(A+t)^{-1} x = 0\}$$

$D_{\theta}(A)$ è uno spazio di interpolazione continua, $D(A) \subset D_{\theta}(A) \subset X$, se poniamo $\|x\|_{\theta} =$
 $\|x\| + \sup_{t \geq t'} t^{\theta} \|A(A+t)^{-1} x\|$.

Poniamo $D_{1+\theta}(A) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D_{\theta}(A)\}$, $\|x\|_{1+\theta} = \|x\| + \|Ax\|_{\theta}$.

L'interesse di $D_{\theta}(A)$ sta nel seguente risultato di regolarità massimale: con-
sideriamo l'equazione

$$(5) \quad \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t \in [0, T]$$

$$u(0) = 0$$

con $f \in C([0, T]; D_{\theta}(A))$. Allora (5) ha un'unica soluzione stretta $u(t) =$

$$= \int_0^t \exp(-(t-s)A) f(s) ds; \text{ inoltre } u \text{ è continua a valori in } D_{1+\theta}(A).$$

Per i nostri scopi è utile la seguente

Proposizione 7. Sia $-A$ il generatore infinitesimale di un semi-
gruppo analitico, $\rho(A) \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Sia poi $f: [0, +\infty[\rightarrow D_{\theta}(A)$ continua.

Se u è la soluzione di (5) si ha

(I) f limitata a valori in $D_{\theta}(A)$ su $[0, +\infty[\Rightarrow u$ limitata a valori in
 $D_{1+\theta}(A)$ su $[0, +\infty[$.

$$(II) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(t)\|_{\theta} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{1+\theta} = 0.$$

$$\text{In ciascun caso } \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{1+\theta} \leq C \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{\theta}.$$

Sia ora $-B$ il generatore infinitesimale di un semigrupp analitico in X . Supponiamo che

$$(h) \quad \sigma(B) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} = \emptyset \quad e$$

poniamo

$$\sigma_1 = \sigma(B) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \sigma_2 = \sigma(B) - \sigma_1$$

Sia Γ una curva orientata col supporto in $\rho(B)$ che gira attorno a σ_1 . Poniamo

$$P_1 = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (z-B)^{-1} dz$$

$P_2 = 1 - P_1$; P_1 e P_2 sono proiettori. Poniamo $X_j = P_j(x)$. X_j è invariante rispetto a B , $X_1 \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} D(B^k)$

Chiamiamo B_j la parte di B in X_j .

Si ha che $B_1 \in \mathcal{L}(X_1)$, $\sigma(B_1) = \sigma_1$, $\sigma(B_2) = \sigma_2$, $-B_2$ è il generatore infinitesimale di un semigrupp analitico in X_1 con $\|e^{-tB_2}\|_{\mathcal{L}(X_2)} \leq Me^{-\delta t}$ ($\delta > 0$). Se $x \in X_j$, $\exp(-tB_j)x = \exp(-tB)x$, $P_j \exp(-tB) = \exp(-tB)P_j = \exp(-tB_j)P_j$.

Si ha allora:

Lemma 8. Sia $x \in X$. Allora $\exp(-tB)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ o $\forall x \in X_2$. Inoltre, si ha anche per $x \in X_2$: $\|\exp(-tB)x\|_{1+\theta} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Veniamo ora al risultato che volevamo provare:

Teorema 9. Siano B soddisfacente (h), $g: D_{1+\theta}(B) \rightarrow D_\theta(B)$ di classe C^1 ,
tali che:

(I) $g(0)=0$, $g'(0) = 0$, g è limitata sui limitati.

(II) $-B+g'(u)$ è la restrizione a $D_{1+\theta}(B)$

del generatore infinitesimale di un semigrupp analitico in X con dominio $D(B)$

e $D_{1+\theta}(B-g'(u)) = D_{1+\theta}(B)$.

Sia $z(\cdot, x)$ la soluzione massimale di

$$\frac{dz}{dt} + Bz(t) = g(z(t))$$

(6)

$$z(0) = x \in D_{1+\theta}(B)$$

Se $\rho > 0$, poniamo $S_{\rho, \sigma} = \{x \in D_{1+\theta}(B) \mid \|z(t, x)\|_{1+\theta} \leq \rho \quad \forall t \geq 0, \quad \|P_2 x\|_{1+\theta} \leq \sigma\}$,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t, x)\|_{1+\theta} = 0$, $B_\sigma = \{x \in D_{1+\theta}(B) \cap X_2 \mid \|x\|_{1+\theta} \leq \sigma\}$.

Allora, $\exists \sigma, \rho > 0$ tali che $P_2|_{S_{\rho, \sigma}}$ è un omeomorfismo fra $S_{\rho, \sigma}$ e B_σ

(con la topologia di $D_{1+\theta}(B)$). Inoltre, $S_{\rho, \sigma}$ e B_σ sono tangenti in 0, nel senso che

$$\lim_{x \in S_{\rho, \sigma}} \frac{\|x - P_2 x\|_{1+\theta}}{\|x\|_{1+\theta}} = 0.$$

$$\|x\|_{1+\theta} \rightarrow 0$$

Dim. (Cenno). Sia $x \in S_{\rho, \sigma}$ $z(t) = z(t, x)$.

Allora,

$$z(t) = \exp(-tB)x + \int_0^t \exp(-(t-s)B)g(z(s))ds.$$

Se $z_j(t) = P_j z(t)$,

$$z_j(t) = \exp(-tB_j)P_j x + \int_0^t \exp(-(t-s)B_j)P_j g(z(s))ds.$$

Per $j=1$, applicando $\exp(tB_1)$, si ottiene

$$P_1 x = - \int_0^t \exp(sB_1) P_1 g(z(s))ds + \exp(tB_1)z_1(t)$$

e al limite per $t \rightarrow +\infty$, (essendo $\|\exp(sB_1)\| \leq M e^{-\delta t}$) $P_1 x = - \int_0^{+\infty} \exp(sB_1) P_1 g(z(s))ds$

Segue

$$z(t) = \exp(-tB_2)P_2 x + \int_0^t \exp(-(t-s)B_2)P_2 g(z(s))ds \\ - \int_t^{+\infty} \exp((s-t)B_1) g(z(s))ds = Tz(t).$$

Per $\rho > 0$, definiamo $Y_\rho = \{u \in C([0, +\infty[; D_{1+\theta}(B)) \mid \|u(t)\|_{1+\theta} \leq \rho, \|u(t)\|_{1+\theta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\}$.

Utilizzando le stime ottenute dalla prop. 7 (ponendo $A = B_2$), si prova che, per ρ opportuno, e per $\|P_2 x\|_{1+\theta} \leq \sigma$, $T(Y_\rho) \subseteq Y_\rho$ e T è una contrazione in Y_ρ . Ne segue che $\forall a \in B_\sigma$ con $\|a\|_{1+\theta} \leq \sigma$ esiste un unico $x \in S_{\rho, \sigma}$ tale che $P_2 x = 0$. Basta prendere $x = z(0)$ con z punto fisso di T .

Consideriamo il seguente esempio:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(u, \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(u), \quad t \geq 0, \quad x \in I = [0, 1]$$

$$(7) \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0$$

$u(0, x)$ assegnato,

con $a \in C^2(R^2)$, $g \in C^1(R)$, $g(0) = 0$, $a(u, p) > 0 \quad \forall (u, p) \in R^2$. Poniamo $D(B) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$, $Bu = -a(0, 0)u'' + g'(0)u$.

$$\begin{aligned} & \text{Si ha che per } 0 < \theta < 1/4 \quad D_\theta(B) \cap h_2^{2\theta}(I) = \\ & = \{u \in L^2(I) \mid t^{-2\theta} \|u(t+\cdot) - u\|_{L^2(I \cap (I-t))} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0\} \quad \text{e } D_{1+\theta}(B) = \\ & = \{u \in H^2(I) \cap H_0^1(I) \mid u'' \in h_2^{2\theta}(I)\}. \end{aligned}$$

Si verifica (posto $g(u) = [a(u, u') - a(0, 0)]u'' + g(u) - g'(0)u$ che la teoria precedente è applicabile se $g'(0) + a(0, 0)k^2 \pi^2 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. In tal

caso, $\chi_2 = \{u \in L^2(I) \mid \int_0^1 u(t) \sin(r\pi t) dt = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}, r \leq j\}$ con

$$g(0) + a(0, 0)j^2 \pi^2 < 0 < g'(0) + a(0, 0)(j+1)^2 \pi^2.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. GRISVARD, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., IV Sez. t. 2, 311-395 (1969).
- [2] J.L. LIONS, E. MAGENES, "Problèmes aux limites non homogènes et application", Durod.
- [3] P.E. SOBOLEVSKI, Trudy Moskov. Mat. 10, 297-350 (1961).
- [4] H.G. KREIN, M.A. RUTMAN, Uspehi Mat. Nauk, 3 (1948).
- [5] G. DE PRATO, P. GRISVARD, Ann. Mat. Pura Appl., IV Sez., Vol. 122, 329-396 (1979).
- [6] D. HENRY, "Geometric theory of semilinear parabolic equations", Springer, 1981.